

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ & ΜΟΡΙΟΔΟΤΗΣΗ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 2025 (ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ)

ΘΕΜΑ Α		
A1	Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	6
	Αν $x > 0$, τότε $(\ln x)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ, αν $x < 0$, τότε $\ln x = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$. Επομένως, $y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x},$ και άρα $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.	
A2	Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.	4
	Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ κ Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ .αι είναι πραγματικός αριθμός.}$	

A3	Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle	5
	Αν μια συνάρτηση f είναι : • συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α, β]$ • παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(α, β)$ και • $f(α) = f(β)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $ξ \in (α, β)$ τέτοιο, ώστε : $f'(ξ) = 0.$	
A4	Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. α) Αν η f είναι συνεχής στο $[α, β]$, η οποία δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε η f παίρνει δυο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές. β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 γ) Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα,: τότε υπάρχει $x_0 \in (1, 4) : f'(x_0) = 0$. δ) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty$.	10

	ε) Κάθε συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της					
	α	β	γ	δ	ϵ	
	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	

ΘΕΜΑ Β

	Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{5x+1}{x-5}$, $x \in R - \{5\}$.	
B1	Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.	9
	Έστω $x_1, x_2 \in R - \{5\}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε : $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{5x_1+1}{x_1-5} = \frac{5x_2+1}{x_2-5}$ $\Leftrightarrow (5x_1 + 1)(x_2 - 5) = (5x_2 + 1)(x_1 - 5)$ $\Leftrightarrow 5x_1x_2 - 25x_1 + x_2 - 5 = 5x_1x_2 - 25x_2 + x_1 - 5$ $\Leftrightarrow -26x_1 = -26x_2$ $\Leftrightarrow x_1 = x_2 .$ Άρα η f είναι "1-1", οπότε αντιστρέφεται. Θέτουμε $f(x) = y$ και έχουμε : $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{5x+1}{x-5} = y$ $\Leftrightarrow 5x + 1 = y(x - 5)$ $\Leftrightarrow 5x + 1 = xy - 5y$ $\Leftrightarrow xy - 5x = 5y + 1$ $\Leftrightarrow x(y - 5) = 5y + 1$ Αν $y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = 5$, τότε $x \cdot 0 = 26$, αδύνατο. Άρα $y \neq 5$, οπότε : $x = \frac{5y+1}{y-5}$ Επιπλέον, $x \in R - \{5\} \Leftrightarrow x \neq 5$ $\Leftrightarrow \frac{5y+1}{y-5} \neq 5$ $\Leftrightarrow 5y + 1 \neq 5y - 25 , \text{ που ισχύει.}$ Για να ισχύει η ισότητα πρέπει και αρκεί : • $D_f = D_{f^{-1}} = R - \{5\}$ • $f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in R - \{5\}$. Άρα είναι ίσες.	

B2	Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{5\}$.	4
	Έχουμε : $D_{f \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_f\}$ $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 5$ $f(x) \in D_f \Leftrightarrow f(x) \neq 5$ $\Leftrightarrow \frac{5x+1}{x-5} \neq 5$ $\Leftrightarrow 5x+1 \neq 5x-25, \text{ που ισχύει.}$ Άρα : $D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{5\}$. $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{5 \cdot \frac{5x+1}{x-5} - 1}{\frac{5x+1}{x-5} - 5} = \frac{\frac{5(5x+1)}{x-5} + \frac{x-5}{x-5}}{\frac{5x+1}{x-5} - \frac{5(x-5)}{x-5}} = \frac{\frac{25x+5+x-5}{x-5}}{\frac{5x+1-5x+25}{x-5}}$ $= \frac{26x}{26} = x.$	
B3	Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την f στο διάστημα $[6, 7]$. Εφόσον πληρούνται, να το εφαρμόσετε και να βρείτε όλα τα $\xi \in (6, 7)$ που το επαληθεύουν.	6
	f συνεχής στο $[6, 7]$ ως ρητή f παραγωγίσιμη στο $(6, 7)$ με $f'(x) = \frac{(5x+1)'(x-5) - (5x+1)(x-5)'}{(x-5)^2}$ $= \frac{5(x-5) - (5x+1)}{(x-5)^2} = \frac{5x-25-5x-1}{(x-5)^2} = \frac{-26}{(x-5)^2}$ Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ για την f στο $[6, 7]$. Επομένως, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (6, 7)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi) = \frac{f(7)-f(6)}{7-6} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{18-31}{1}$ $\Leftrightarrow \frac{-26}{(\xi-5)^2} = -13$ $\Leftrightarrow -13(\xi-5)^2 = -26$ $\Leftrightarrow (\xi-5)^2 = 2$ $\Leftrightarrow \xi-5 = \sqrt{2} \text{ ή } \xi-5 = -\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow \xi = 5 + \sqrt{2} \text{ ή } \xi = 5 - \sqrt{2}, \text{ απορρίπτεται.}$	

B4	Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία $y = 5$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = 1$ και $x = 4$.	6
	Οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{5x+1}{x-5}$ και $g(x) = 5$ είναι συνεχείς στο διάστημα $[1, 4]$. Άρα : $E = \int_1^4 f(x) - g(x) dx$ $= \int_1^4 \left \frac{5x+1}{x-5} - 5 \right dx$ $= \int_1^4 \left \frac{5x+1}{x-5} - \frac{5x-25}{x-5} \right dx$ $= \int_1^4 \left \frac{5x+1}{x-5} - \frac{5x-25}{x-5} \right dx$ $= \int_1^4 \left \frac{26}{x-5} \right dx$ $= \int_1^4 \frac{26}{ x-5 } dx$ Είναι : $1 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 5 \leq -1$, άρα : $x - 5 = -(x - 5)$. Επομένως : $E = -\int_1^4 \frac{26}{x-5} dx$ $= -[26 \ln 4 - 5 - 26 \ln 1 - 5]$ $= -(26 \ln 1 - 26 \ln 4)$ $= 26 \ln 4 \text{ τ.μ.}$	

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \ln x}{1-x} & , \quad \alpha\nu \quad 0 < x \neq 1 \\ f(1) & , \quad \alpha\nu \quad x = 1 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(1)+1)x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 + 1} = 2$

Γ1 Να αποδείξετε ότι $f(1) = -1$

4

Διακρίνω τις περιπτώσεις:

- Αν $f(1)+1 \neq 0 \Leftrightarrow f(1) \neq -1$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(1)+1)x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(1)+1)x^3}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(1)+1)x = \begin{cases} +\infty & , \alpha\nu \quad f(1) > -1 \\ -\infty & , \alpha\nu \quad f(1) < -1 \end{cases}$$

απορρίπτονται.

- Αν $f(1)+1 = 0 \Leftrightarrow f(1) = -1$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(1)+1)x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2, \text{ δεκτό}$$

Άρα $f(1) = -1$.

Για $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \ln x}{1-x} & , \quad \alpha\nu \quad 0 < x \neq 1 \\ -1 & , \quad \alpha\nu \quad x = 1 \end{cases}$

Γ2 Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

5

Για κάθε $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα και συνεχής, με:

$$f'(x) = \left(\frac{x \cdot \ln x}{1-x} \right)' = \dots = \frac{1-x+\ln x}{(1-x)^2}.$$

Όμως $\ln x \leq x-1$ για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

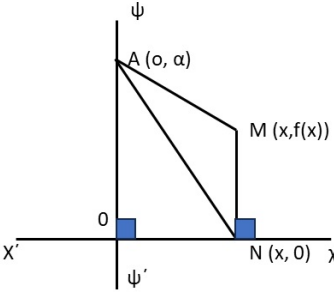
Άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ και f συνεχής στο 1, αφού :

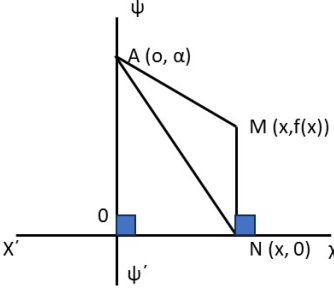
	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{1-x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 1} \frac{1+\ln x}{-1} = -1 = f(1) \ ,$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$																	
Γ3	Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = (1-x)^2 + 2x(\ln x + 1 - x)$																	
i	Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και να βρείτε το πρόσημό της	5																
	Για κάθε $x > 0$ η g είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = \dots = 2(\ln x - x + 1) \leq 0 \ ,$ με την ισότητα να ισχύει για $x = 1$, μεμονωμένο σημείο άρα g γνησίως φθίνουσα. Η g έχει προφανή ρίζα το 1 και μοναδική λόγω μονοτονίας. Οπότε για κάθε $x > 1 \stackrel{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(1) \Leftrightarrow g(x) < 0$ και για κάθε $0 < x < 1 \stackrel{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(1) \Leftrightarrow g(x) > 0$																	
ii	Με τη βοήθεια του ερωτήματος (i) και γνωρίζοντας ότι η f ' είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.	3																
	i. Η f ' είναι παραγωγίσιμη και συνεχής με $f''(x) = \dots = \frac{g(x)}{x(1-x)^3} \ . \text{ Οπότε:}$ <table border="1"><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$x(1-x)^3$</td><td>+</td><td></td><td>-</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>+</td><td></td><td>-</td></tr><tr><td>$f''(x)$</td><td>+</td><td></td><td>+</td></tr></table> Άρα η f είναι κυρτή.	x	0	1	$+\infty$	$x(1-x)^3$	+		-	$g(x)$	+		-	$f''(x)$	+		+	
x	0	1	$+\infty$															
$x(1-x)^3$	+		-															
$g(x)$	+		-															
$f''(x)$	+		+															

Γ4	Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι: $\int_1^2 f(x) dx > -\frac{5}{4} .$	8
	Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \quad (1)$ Επίσης: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x + 1 - x}{-(x - 1)^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH} \frac{\ln x}{-2(x - 1)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \dots = -\frac{1}{2} .$ Άρα η (1) γράφεται: $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} .$ Αφού η f είναι κυρτή, όλες οι εφαπτόμενες της άρα και η $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, θα βρίσκονται κάτω από τη cf με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή: $f(x) \geq -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \text{ με την ισότητα να ισχύει μόνο για } x = 1 ,$ οπότε: $\int_1^2 f(x) dx > \int_1^2 \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) dx \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx > -\frac{5}{4} .$	

ΘΕΜΑ Δ		
	Δίνεται η συνάρτηση $g : [0, +\infty \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g'(x) = \frac{e^x+1}{e^{g(x)}}$, $x \geq 0$, και $g(0) = 0$.	
Δ1	Να αποδείξετε ότι $g(x) = \ln(e^x + x)$, $x \geq 0$.	3
	Για τη συνάρτηση g έχουμε: $g'(x) = \frac{e^x+1}{e^{g(x)}} \Leftrightarrow g'(x) \cdot e^{g(x)} = e^x + 1$ $\Leftrightarrow (e^{g(x)})' = (e^x + x)'$. Ά Για $x = 0$: $e^{g(0)} = e^0 + 0 + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$. Άρα: $e^{g(x)} = e^x + x \Leftrightarrow \ln e^{g(x)} = \ln(e^x + x) \Leftrightarrow g(x) = \ln(e^x + x)$. άρα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $e^{g(x)} = e^x + x + c$.	
Δ2	Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{αν } x < 0 \\ g(x), & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$	
i.	Να βρεθεί, αν υπάρχει, κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f	2
	Κατακόρυφη ασύμπτωτη αναζητούμε στα ανοικτά άκρα του D_f ή στα σημεία ασυνέχειας. Έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x} = -\infty$. Επομένως, υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f και είναι η ευθεία $x = 0$ (άξονας $y'y$).	
ii.	Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και, στη συνέχεια, να βρείτε το σύνολο τιμών της.	5
	Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1 = (-\infty, 0)$ με $f'(x) = -\frac{2}{x^2} < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty, 0)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_2 = [0, +\infty)$ με $f'(x) = g'(x) = \frac{e^x+1}{e^{g(x)}} > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [0, +\infty)$.	

	Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty, 0)$, άρα $f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)$. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$ Άρα $f(A_1) = (-\infty, 0)$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [0, +\infty)$, άρα $f(A_2) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$. $f(0) = g(0) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + x)) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$. (Θέτουμε $u = e^x + x$, $u \rightarrow +\infty$) Άρα $f(A_2) = [0, +\infty)$. Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty) = \mathbb{R}$.	
Δ3	Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^{g(x)} - g(x)}{x} + \frac{g(x)}{x-2025} = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 2025)$.	5
	Για $x \in \mathbb{R}_+^* - \{2025\}$ ισοδύναμα έχουμε : $\frac{e^{g(x)} - g(x)}{x} + \frac{g(x)}{x-2025} = 0 \Leftrightarrow (x - 2025) (e^{g(x)} - g(x)) + xg(x) = 0.$	1
	Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = (x - 2025) (e^{g(x)} - g(x)) + xg(x)$, $x \in [0, 2025]$. - Η h είναι συνεχής στο $[0, 2025]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων $h(0) = (0 - 2025) (e^{g(0)} - g(0)) = -2025 < 0$ $h(2025) = 2025 g(2025) > 0$, αφού $2025 > 0 \stackrel{g \uparrow}{\Leftrightarrow} g(2025) > g(0) \Leftrightarrow g(2025) > 0$ $h(0) \cdot h(2025) < 0$.	3

	Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[0, 2025]$, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 2025)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$. Άρα η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 2025)$.	1
Δ4	Σημείο M με θετική τετμημένη κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 1cm/sec. Αν N η προβολή του M στον άξονα $x'x$ και σημείο $A(0, \alpha)$ $\alpha > 0$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου AMN τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τετμημένη του M είναι 2cm.	5
	Με δεδομένο ότι το M έχει θετική τετμημένη και $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$, (από το Δ2), το σημείο M βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο. Τότε : $\overrightarrow{AM} = (x, f(x) - \alpha)$ $\overrightarrow{AN} = (x, -\alpha)$.  Οπότε : $(AMN) = \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN})$ $= \frac{1}{2} x(-\alpha) - x(f(x) - \alpha)$ $= \frac{1}{2} -\alpha x - xf(x) + \alpha x$ $= \frac{1}{2} -xf(x) \quad (\text{αφού } x > 0, f(x) > 0)$ $= \frac{1}{2} xf(x)$ $= \frac{1}{2} x \ln(e^x + x).$ Άρα : $E(t) = \frac{1}{2} x(t) \ln(e^{x(t)} + x(t))$ οπότε $E'(t) = \frac{1}{2} [x'(t) \ln(e^{x(t)} + x(t)) + x(t) \frac{e^{x(t)} x'(t) + x'(t)}{e^{x(t)} + x(t)}]$ $= \frac{1}{2} x'(t) [\ln(e^{x(t)} + x(t)) + x(t) \frac{e^{x(t)} + 1}{e^{x(t)} + x(t)}]$ Για $t = t_0$ έχουμε : $E'(t_0) = \frac{1}{2} x'(t_0) [\ln(e^{x(t_0)} + x(t_0)) + x(t_0) \frac{e^{x(t_0)} + 1}{e^{x(t_0)} + x(t_0)}]$ $= \frac{1}{2} x'(t_0) [\ln(e^{x(t_0)} + x(t_0)) + x(t_0) \frac{e^{x(t_0)} + 1}{e^{x(t_0)} + x(t_0)}]$	2

	$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left[\ln(e^2 + 2) + 2 \cdot \frac{e^2 + 1}{e^2 + 2} \right]$ $= \frac{1}{2} \left[\ln(e^2 + 2) + \frac{2(e^2 + 1)}{e^2 + 2} \right] \text{ cm}^2 / \text{sec.}$	
	<u>2ος τρόπος για την εύρεση του εμβαδού</u> Με δεδομένο ότι το M έχει θετική τετμημένη και $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$, (από το Δ2), το σημείο M βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο. Έχουμε : $(AMN) = \frac{1}{2} \cdot (MN) \cdot \nu$ $= \frac{1}{2} \cdot f(x) \cdot x $ $= \frac{1}{2} x f(x) \quad (\text{αφού } x > 0, f(x) > 0)$ $= \frac{1}{2} x \ln(e^x + x).$ Άρα : $E(t) = \frac{1}{2} x(t) \ln(e^{x(t)} + x(t)).$ 	
Δ5	Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x^2} - 1) + f(x - \eta\mu x) = 0$.	5
	Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $x \geq \eta\mu x$ (Η ισότητα ισχύει για $x = 0$). Άρα $x - \eta\mu x \geq 0$. Επίσης ισχύει : $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 \geq 0$ (Η ισότητα ισχύει για $x = 0$). Επομένως, η εξίσωση $f(e^{x^2} - 1) + f(x - \eta\mu x) = 0$ θα λυθεί στο διάστημα $[0, +\infty)$. Γνωρίζουμε ότι : $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$. Για να ισχύει η ισότητα πρέπει και αρκεί : $\begin{cases} f(e^{x^2} - 1) = 0 \\ f(x - \eta\mu x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(e^{x^2} - 1) = f(0) \\ f(x - \eta\mu x) = f(0) \end{cases}$ $\stackrel{f^{-1}-1^{-1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} e^{x^2} - 1 = 0 \\ x - \eta\mu x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x^2} = 1 \\ x = \eta\mu x \end{cases} \Leftrightarrow \{x = 0\}.$	